Wstępne pojęcia topologii

Na podstawie: Klaus Jänich, Topologia, wyd. PWN 1996

13.X.2014r.

Ćwiczenie – rozgrzewka (C1), czas: 5 minut. a) Napisać definicję *zawierania się* zbioru V w pewnym zbiorze U. b) Sprawdzić, że dowolny zbiór zawiera się sam w sobie.

Definicja (D1). Weźmy zbiór X oraz rodzinę (kolekcję) $\mathcal{O}$ zbiorów otwartych w X, tj. takich, że:

A1. Zbiór X oraz zbiór pusty ø są otwarte;
A2. Dowolna suma zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym;
A3. Dowolne przecięcie zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Wówczas parę (X, $\mathcal{O}$) nazywamy przestrzenią topologiczną na zbiorze X. Często, poprzez skrót myślowy, sam zbiór X nazywamy przestrzenią topologiczną.

Definicja (D2). $X \supset U$ jest otoczeniem *x*, jeśli $\exists V \sim otwarty: \; x \in V \subset U$.

Definicja (D3). *x* jest punktem wewnętrznym *B*, jeśli *B* jest otoczeniem *x*.

Wniosek (W1). Każdy punkt zbioru otwartego jest jego punktem wewnętrznym.

Dowód jest ćwiczeniem dla Czytelnika; przypominamy o C1.b.

Stwierdzenie (S1). Wnętrze zbioru *B*, tzn. zbiór $\mathring{B}$ wszystkich jego punktów wewnętrznych, jest zbiorem otwartym.

Zadaniem Czytelnika jest pilne i ze zrozumieniem prześledzenie dowodu. Zasadza on się na pomyśle, że każdy bez wyjątku punkt wewnętrzny jest otoczony jedynie punktami wewnętrznymi, a takie lokalne otoczenia zawierające je, są otwarte. Następnie skorzystamy z aksjomatu A2 otwartości, przenosząc ją na cały zbiór $\mathring{B}$.

Dowód S1. Weźmy dowolny punkt $x \in \mathring{B}$. Ze względu na D3, zbiór *B* stanowi otoczenie *x*. Istnieje więc na mocy D2 zbiór otwarty V w *B*, do którego należy *x*. W zbiorze V są wyłącznie punkty wewnętrzne zbioru *B* (znów z D3, bo każdy z tych punktów należy do otwartego V, a V zawiera się w *B).*

Dla każdego punktu $x \in \mathring{B}$ można wprowadzić taki zbiór otwarty, jak V powyżej. Ich suma jest (A2) także otwarta. Suma ta zawiera wyłącznie punkty $x \in \mathring{B}$, a zarazem dowolne (czyli wszystkie) punkty $x \in \mathring{B}$. Jest ona otwarta, tzn., że $\mathring{B}$ jest otwarty. □

Wniosek (W2). Suma zawartych w *B* otoczeń wszystkich punktów wewnętrznych zbioru *B* jest jego wnętrzem $\mathring{B}$.

Wniosek (W3). Suma wszystkich zbiorów otwartych zawartych w *B* stanowi jego wnętrze $\mathring{B}$ (ponieważ zawiera wszystkie punkty wewnętrzne *B* i zarazem tylko takie).

Definicja (D4). Zbiór $D \subset X$ jest domknięty, jeśli *X\D* jest otwarty.

Fakt/Wniosek (W4). Istnieją zbiory ani nie domknięte, ani nie otwarte. Istnieją zbiory otwarte i domknięte jednocześnie.

(Tu Czytelnik podaje przykłady ze zbioru $\mathbb{R}$.)

Definicja (D5). Zbiór punktów należących do *X,* których ani *B,* ani *X\B* nie jest otoczeniem, nazywamy brzegiem zbioru *B* i oznaczamy (m.in.) ∂*B*. Punkty te nazywamy brzegowymi.

(Co stanowi brzeg odcinka [0; 1] na osi rzeczywistej? Sprawdzić według definicji.)

Obserwacja (W5). Jeśli *B* jest domknięty, wówczas $\partial B \subset B$.

Dowód W5, czas: 15 minut. Czytelnik zechce sam, w ciągu 15 minut, przeprowadzić dowód, przeczytawszy wpierw jego proponowany schemat:

Należy założyć wbrew tezie, że istnieje taki punkt *x*, który należy do brzegu *B* i zarazem nie należy do *B,* a następnie wykazać sprzeczność. a) Co wiemy o *X\B* i jaką cechę ma wobec niego punkt *x?* b) Wspomnieć na definicję brzegu zbioru *B* i pokazać jawną sprzeczność.

Challenge (C2*), czas: 20 minut. Wykazać (dokończyć Dowód C2 poniżej) następującego faktu:

Suma $B \cup \partial B$ jest domknięta.

Można to ująć następująco: „Brzeg domyka zbiór”.

Najpierw zauważmy na marginesie, że jeśli *B* jest domknięty, to dowód jest trywialny (dlaczego? Czytelnik uzasadni, nie wliczając tego w czas na wykonanie zadania C2).

W zadaniu C2 pomocny okaże się (przeczytać nie licząc jeszcze czasu) następujący

Lemat (C2.1). Brzeg ∂B jest *(*sam z siebie) zbiorem domkniętym.

Dowód C2.1. Nazwijmy dopełnienie brzegu $X \backslash \partial B$ =: *O*. Zbiór *O* ma tylko swoje punkty wewnętrzne.

Inaczej bowiem istniałby taki $x \in O$, dla którego nie da się znaleźć otoczenia zawartego w $X \backslash \partial B$, czyli dowolne otoczenie *x* zawierałoby również punkty z ∂B. A przecież punkt *x*, na mocy D5, jest punktem wewnętrznym *B* albo $X \backslash B$ (inaczej należałby do brzegu). A więc *x* ma otoczenie nie zawierające żadnego punktu *d* z ∂B (punkt *d*, dla którego otoczeniem byłby zbiór *B* albo $X \backslash B$, na mocy D5 nie należałby do brzegu*)*.

W ten sposób otrzymujemy sprzeczność., a zatem faktycznie, *O* ma tylko swoje punkty wewnętrzne. Jest zatem otwarty. W konsekwencji, jego dopełnienie, czyli ∂B jest domknięte. □

Dowód C2. Weźmy punkt $x \in X$, który nie należy ani do B, ani do ∂B. Zbiór takich punktów nazwijmy *O:* $x \in X \setminus (B \cup \partial B) = X \setminus B \cap X \setminus \partial B =: O$.

Ale każdy punkt spoza ∂B musi być punktem wewnętrznym albo *B*, albo $X \backslash B$.

x nie może być punktem wewnętrznym zbioru *B*, bo do niego nie należy. Zatem *x* ma swoje otoczenie w $X \backslash B$. *x* jest również punktem wewnętrznym $X \backslash \partial B$, ponieważ ∂B jest domknięty (LC2.1).

Teraz, z aksjomatu otwartości A... wynika, że punkt *x* jest punktem wewnętrznym również zbioru … Ale *x* był dowolnie wybrany, a to znaczy, że zbiór ten składa się z samych (takich) punktów wewnętrznych (bo każdy spełnia powyższe rozumowanie). Zbiór … jest więc … W konsekwencji, … □